Graphisme 3D

Contenu

Dans cette partie, nous allons aborder le graphisme 3D, c'est à dire les mécanismes de visualisation de scènes 3D ainsi que ceux de la formation d'une image, en particulier les différentes projections 3D-2D.

Coordonnées homogènes

De la même manière que dans le cas plan, nous nous plaçons dans l'espace projectif $\mathcal{P}^3$. Un point P de $\mathcal{P}^3$ est représenté par un vecteur 4x1 de coordonnées $[x, y, z, w]$, dont une au moins est non nulle. x, y, z et w sont les coordonnées homogènes de P.

On retrouve les mêmes arguments que dans le cas plan : représentation matricielle des transformations, ... Les droites sont remplacées par des plans :

- ☞ coordonnées homogènes d'un plan : (a, b, c, d),
- ☞ dualité point-plan,
- ☞ les points à l'infini : $(x, y, z, 0)$ définissent le plan à l'infini

1 Transformations élémentaires

Translations :

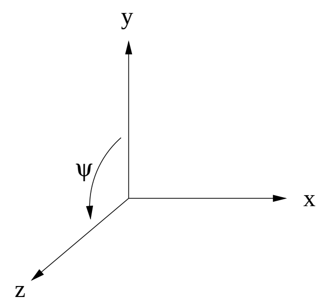
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotations : Représentation par les angles d'Euler :

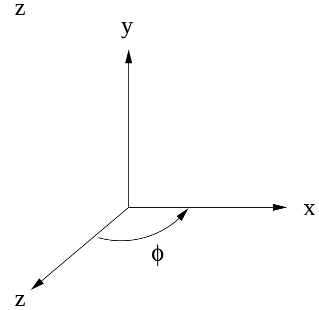
$$R = R_z \cdot R_y \cdot R_x,$$

avec :

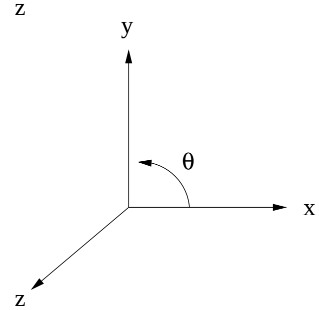
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Propriétés des matrices de rotation :

- $\det R = 1$,
- $R^{-1} = R^t$.
- groupe des rotations non commutatif.

Changements d'échelles :

$$T = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

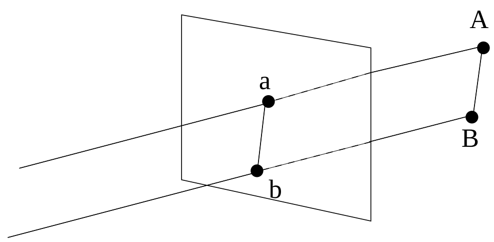
2 Les projections

Utilité :

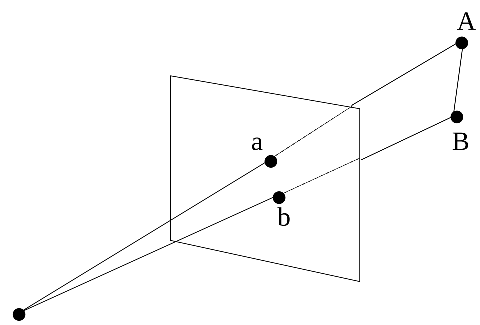
- Visualisation 3D (synthèse).
- Modélisation des caméras (vision).

Deux familles de projections :

1. Projections parallèles.
2. Projections perspectives.



Projection parallèle



Projection perspective

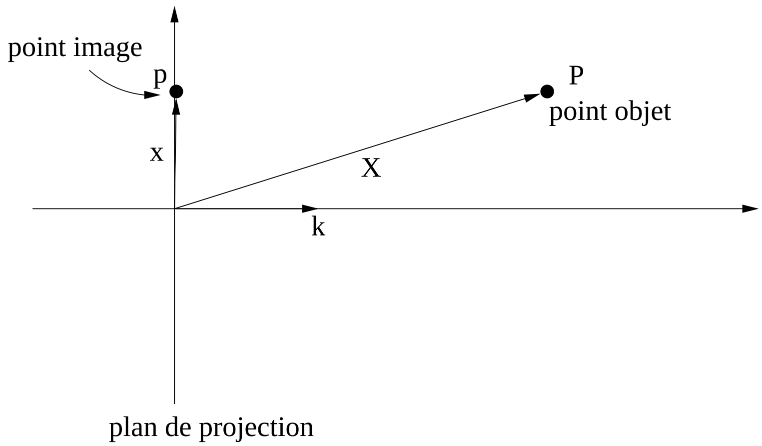
2.1 Les projections parallèles

La projection se fait dans le plan de projection suivant une direction. Il existe deux types de projections parallèles dépendant du fait que la direction de projection soit perpendiculaire au plan de projection :

1. Projections orthographiques (perpendiculaires).
2. Projections obliques (peu utilisées en analyse et synthèse d'images).

Les projections orthographiques

Le point P se projette au point p suivant la direction d'observation k.



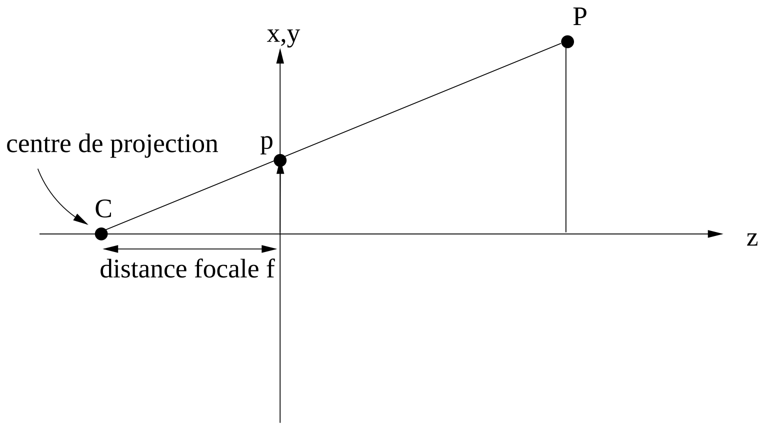
Soit X et x les vecteurs positions de P et p alors :

$$\mathrm{x} = X - (X.k)k.$$

On choisit $k = (0, 0, 1)$ et on place le plan de projection en $z = 0$. Alors la projection orthographique s'écrit sous la forme matricielle suivante, et à l'aide des coordonnées homogènes :

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$$

2.2 Les projections perspectives



La projection se fait suivant un centre de projection. On place l'origine du repère au centre de projection et on l'oriente de sorte que le plan de projection ait pour équation $z = f$ où f est la *distance focale*.

Soient $X_P,\ Y_P,\ Z_P$ les coordonnées cartésiennes du point P et $x_p,\ y_p,\ z_p$ celle du point image p. On a alors les relations :

$$\begin{cases} x_p = \frac{X_P\ f}{Z_P}, \\ y_p = \frac{X_P\ f}{Z_P}, \\ z_p = f. \end{cases}$$

d'où l'équation matricielle :

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \cdot X$$

où x, X sont les vecteurs de coordonnées homogènes de p et P.

Autre représentation, le plan de projection est à $z = 0$ et le centre de projection à $z = -f$:

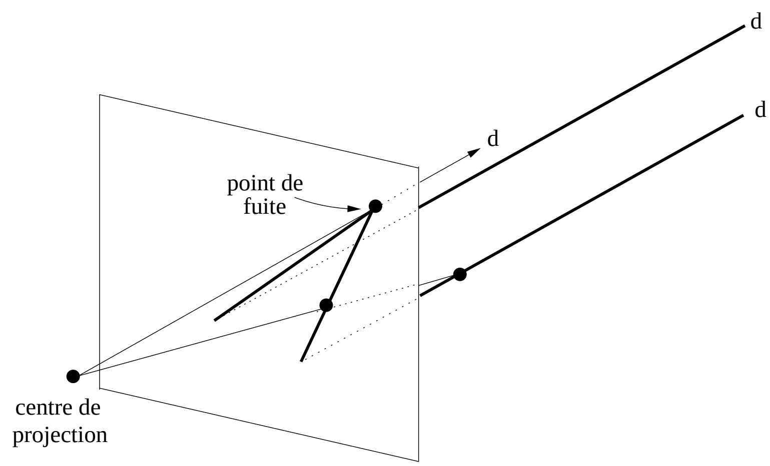
$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot X$$

Exemple de projection : un cercle
Soit un cercle dans l'espace de rayon r, situé dans un plan parallèle au plan de projection à une distance Z de ce dernier.

1. On suppose que le cercle est centré en $(0, 0)$, montrer que sa projection est un cercle de rayon $fr/(Z + f)$.
2. On déplace le cercle une direction du plan de projection, que devient sa projection ?
3. si le plan du cercle n'est pas parallèle au plan de projection ?

2.3 Points de fuite

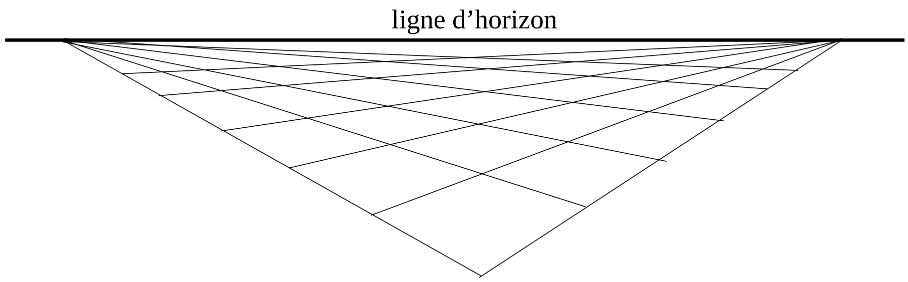
Les droites parallèles qui ne sont pas dans une direction du plan de projection définissent un *point de fuite*. Les projections de ces droites s'intersectent en effet dans le plan de projection, cette intersection étant le point de fuite.



Chaque paire de droites parallèles définit un point de fuite différent. Pour un ensemble de droites appartenant à un plan, les points de fuite parcourent une droite appelée ligne d'horizon.

De manière similaire, deux plans parallèles définissent une ligne d'horizon correspondant à la projection de l'intersection de ces deux plans.
Les points à l'infini correspondent à des directions dans l'espace (cf. cours précédent).

Exercices :



1. Déterminez la position image du point de fuite associée à une droite de l'espace ?
2. Dans quel cas le point de fuite est rejeté à l'infini ?
3. Déterminez l'équation de la ligne d'horizon associée à un groupe de plans parallèles.
4. Dans quel cas la ligne d'horizon est rejetée à l'infini ?

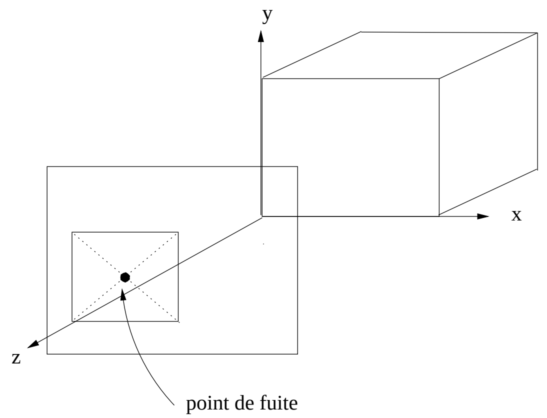


Figure 1: *Projection à un point de fuite.*

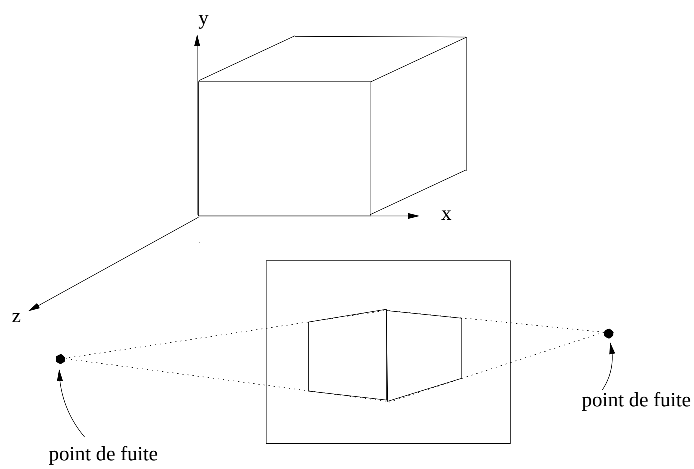


Figure 2: *Projection à deux points de fuite.*

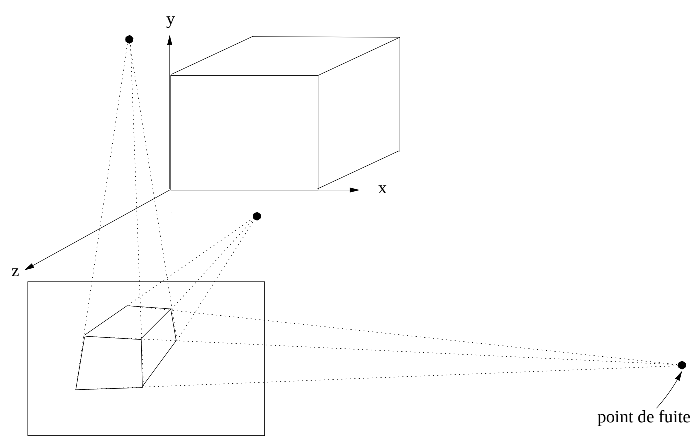


Figure 3: *Projection à trois points de fuite.*

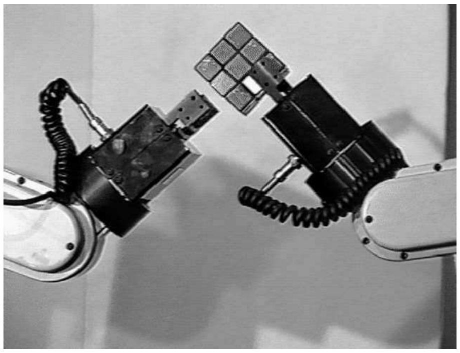
3 Formation d'images

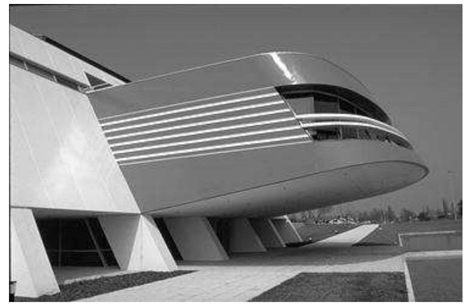
On se place dans le cas d'images réelles, prises avec un appareil numérique (CCD), et on cherche à modéliser la transformation scène <-> image. Celle-ci est composée de différentes transformations :

- projection,
- déplacement rigide,
- changement d'échelles.

et peut donc être représentée sous forme matricielle.

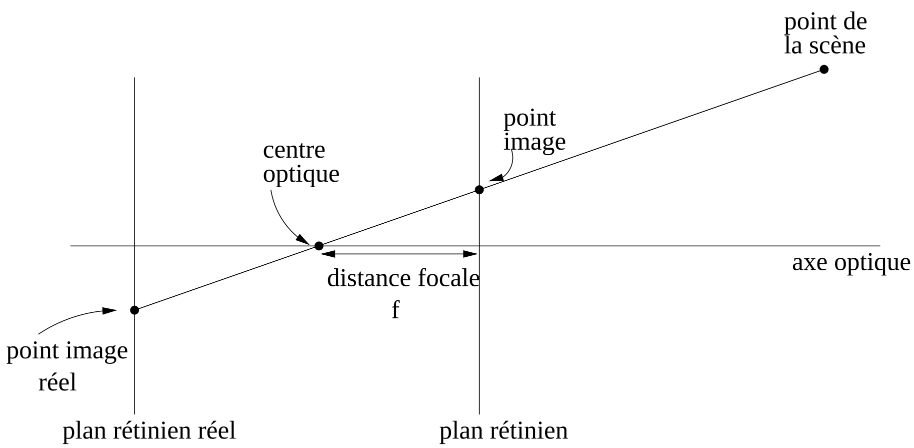
3.1 Projection : le modèle à sténopé





projections parallèles ? perspectives ?

Le modèle de caméra le plus utilisé, *modèle à sténopé (pinhole)* :



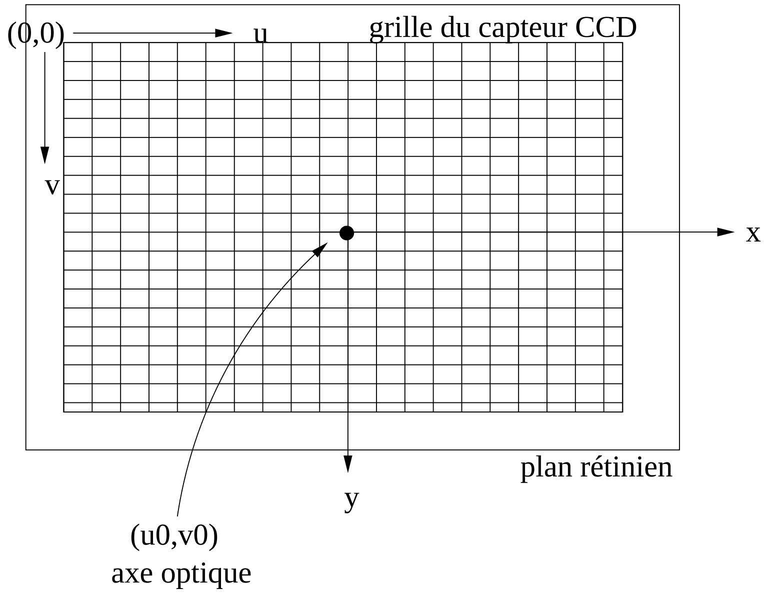
La matrice de projection correspondante :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix}$$

qui représente donc la matrice de transformation du repère de la scène vers le repère de la rétine.

3.2 Capteurs CCD

Pour modéliser les capteurs CCD, on définit les coordonnées pixels (u, v).

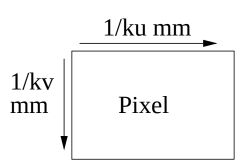


Transformation du repère de la rétine vers le repère image :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ wz \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & 0 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

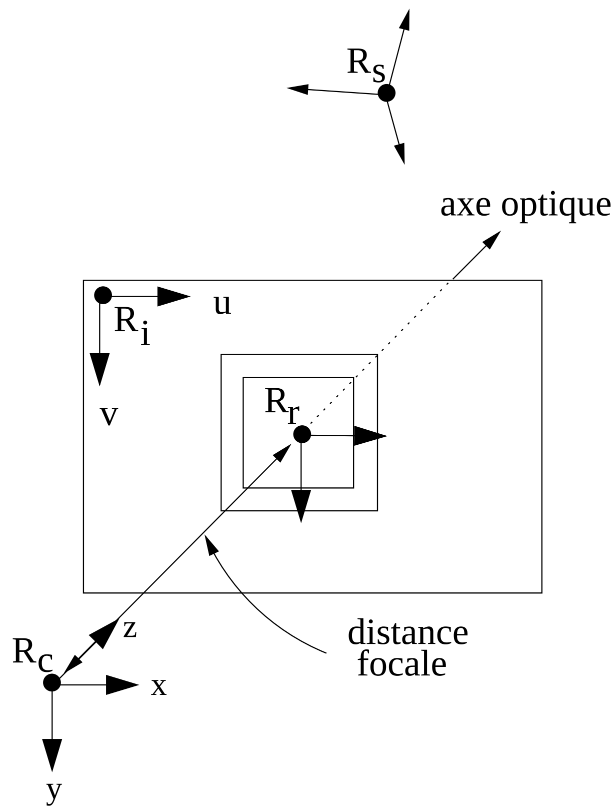
où :

1. k_u et k_v sont les facteurs d'échelles en pixels/mm.



2. (u_0, v_0) sont les coordonnées en pixels de l'intersection de l'axe optique avec le plan rétinien.

3.3 Transformation globale



La transformation du repère de la scène vers le repère image s'écrit :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ wf \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & 0 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & R & & T \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

En pratique, on utilise l'expression suivante dans laquelle la troisième coordonnée du point image n'apparait plus (cette coordonnée est constante) :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & R & & T \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = {}_r^iC \cdot {}_c^rP \cdot {}_s^cT \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & R & & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = {}^{i}_{r}C \cdot {}^{c}_{s}T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ☞ Paramètres intrinsèques et extrinsèques de la caméra.
- ☞ Une caméra est définie par 10 paramètres dans le cas où les pixels sont carrés, 11 dans le cas général.

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & \alpha & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & R & & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ☞ Une matrice projective 3x4 correspond à 11 degrés de liberté.

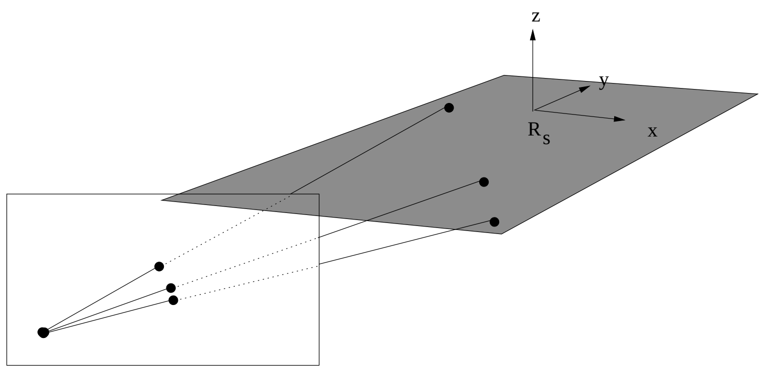
$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ☞ Calibration de caméras

4 Applications

4.1 Projection de plans

Nous allons illustrer le principe des projections dans le cas de points coplanaires. C'est à dire lorsque l'on observe des points appartenant à un même plan.



4.1.1 Le cas perspectif

Nous supposons, sans perte de généralité, que les points appartiennent au plan d'équations $z = 0$ dans la scène. Nous pouvons réecrire l'équation de projection sous la forme :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & T_x \\ R_{21} & R_{22} & T_y \\ R_{31} & R_{32} & T_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

La transformation entre (wu, wv, w) et $(x, y, 1)$ est une projectivité plan à plan, on parle *d'homographie*.

Exercice :

1. Que peut-on en déduire sur la transformation existant entre 2 projections perspectives d'une image ?
2. Dans le cas d'une projection orthographique que devient cette transformation ?

4.1.2 Le cas orthographique

Nous allons tout d'abord établir l'équation de projection dans le cas orthographique. Reprenons l'équation de projection précédemment établie, dans le cas orthographique cette équation peut s'écrire (le plan de projection étant en $z = 0$ dans le repère de la caméra) :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & R & & T \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

si l'on fait tendre f vers l'infini :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & R & & T \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant si nous supposons que les points observés appartiennent au plan d'équations $z = 0$ alors l'équation de projection devient :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & T_x \\ R_{21} & R_{22} & T_y \\ R_{31} & R_{32} & T_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} wu \\ wv \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

☞ Dans le cas d'une projection orthographique, la transformation entre 2 projections d'une image est une transformation affine.

☞ Application dans le cas de texture mapping.

Exercice :

- Traitez le cas de points appartenant à une droite.

4.2 Formation d'images avec OpenGL

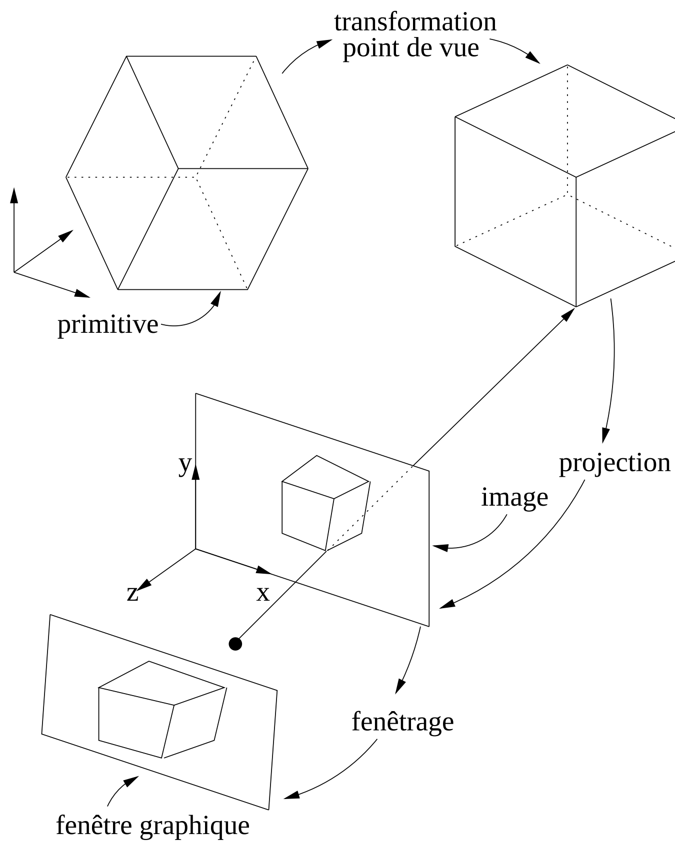


Figure 4: La construction d'une image.

Les différentes étapes de la génération d'une image sont :

1. spécification des primitives à dessiner : les primitives sont définies dan s un certain repère,

2. transformation *point de vue* : une transformation est appliquée aux p rimitives à dessiner. Cette transformation sert à fixer le point de vue des prim itives ou, en d'autres termes, la position du plan image.

3. Projection : les primitives sont projetées sur le plan image suivant la pr ojection spécifiée (orthographique, perspective).

4. Fenêtrage et numérisation : l'image obtenue est redimensionnée suivant les tailles de la fenêtre graphique et les primitives projetées sont numérisées sou s la forme de pixels dans la mémoire vidéo.

Spécifier une projection dans OpenGL consiste à spécifier le volume d'observation. Bien que non caractéristique des projections, le volume d'observation permet de définir une région de visibilité de l'espace.

4.2.1 Projection orthographique

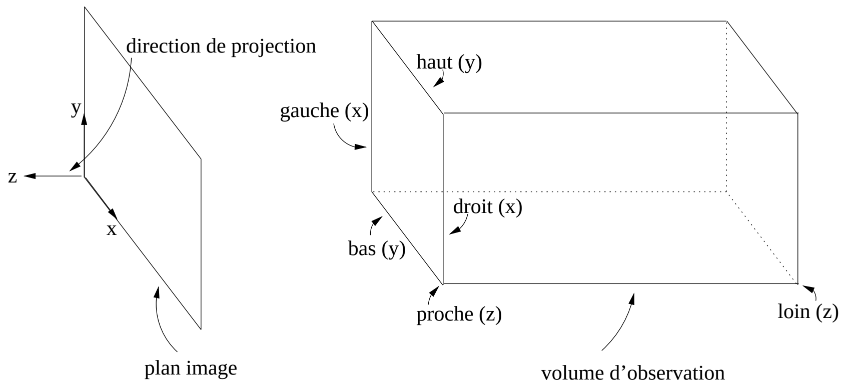


Figure 5: Le volume d'observation d'une projection orthographique

4.2.2 Projection perspective

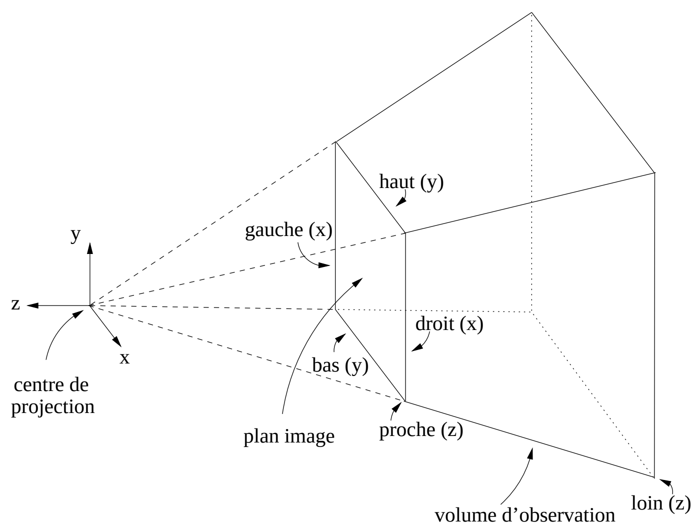


Figure 6: Le volume d'observation d'une projection perspective

4.3 Calibration de caméras en vision par ordinateur