Les transformations géométriques du plan

Contenu

Les transformations géométriques du plan constituent des fonctions de base du graphisme au même titre que le traçage et le remplissage. Les transformations usuelles du graphisme :

- Translation.
- Rotation.
- Changement d'échelle.

À cela s'ajoute les modèles affines et projectifs permettant de modéliser un éventail plus large de transformation, en particulier pour les transformations d'images (texture mapping).

1 Les coordonnées homogènes

On se place dans le plan projectif $\mathcal{P}^2$. Un point P de $\mathcal{P}^2$ est représenté par un vecteur 3x1 de coordonnées $[x, y, w]$, dont une au moins est non nulle. x, y et w sont les coordonnées homogènes (projectives) de P.

Deux vecteurs de coordonnées $[x, y, w]$ et $[x', y', w']$ représentent le même point ssi il existe un scalaire λ tel que :

$$x' = \lambda x,\ y' = \lambda y,\ w' = \lambda w.$$

- ☞ Permet de représenter sous forme matricielle l'ensemble des transformations, en particulier les translations.
- ☞ La correspondance point <-> coordonnées n'est pas bijective.
- ☞ L'application de l'algèbre linéaire est un peu plus complexe dans le cas projectif.
- ☞ Une droite est aussi définie par un vecteur $[a, b, c]$ de coordonnées non toutes nulles définies à un facteur multiplicatif près.
- ☞ Représentation usuelle : $[x, y, 1]$.
- ☞ Points à l'infini : $[x, y, 0]$.

2 Les transformations

2.1 Les transformations élémentaires

La représentation des transformations usuelles à l'aide des coordonnées homogènes $X = [x, y, w]^t$ et $X' = [x', y', w']^t$:

- Translation de (t_x, t_y) : $X' = T \cdot X$ avec :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation d'angle θ : $X' = R \cdot X$ avec :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Symétries :

$$\underset{\text{axe des } x}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{axe des } y}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{origine}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

- Changements d'échelle (s_x, s_y) :

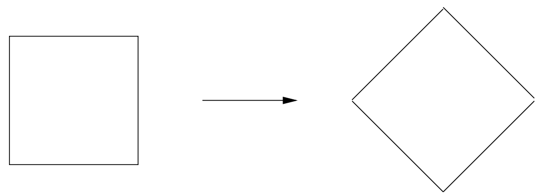
$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Les transformations Euclidiennes

Matrice :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Types de transformations :



Caractéristiques :

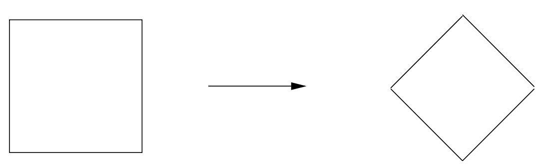
- ☞ 3 degrés de liberté (translation 2, rotation 1).
- ☞ Préserve les angles, surfaces et longueurs.

2.3 Les similitudes du plan

Matrice :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Types de transformations :



Caractéristiques :

- ☞ 4 degrés de liberté (translation 2, rotation 1, facteur d'echelle 1).

☞ Préserve les angles et rapports de longueurs.

Exercices :

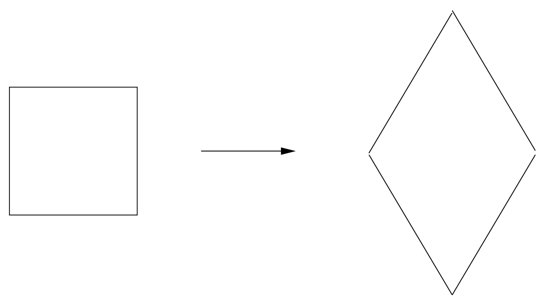
1. Démontrez la préservation des angles et des rapports de longueurs.

2.4 Les transformations affines

Matrice :

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ 0 & 0 & m_7 \end{bmatrix}$$

Types de transformations :



Caractéristiques :

☞ 6 degrés de liberté.

☞ Préserve le parallélisme, les rapports de surface, les rapports de longueurs sur une droite (ex : le point milieu), les coordonnées barycentriques.

☞ Le groupe des transformations affines du plan est le groupe des transformations qui laissent la droite à l'infini globalement invariante.

Exercices :

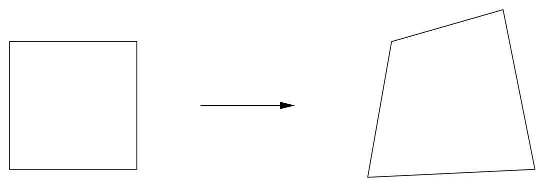
1. Démontrez la préservation du parallélisme.
2. Démontrez la préservation du point milieu et des coordonnées barycentriques.

2.5 Les transformations projectives

Matrice :

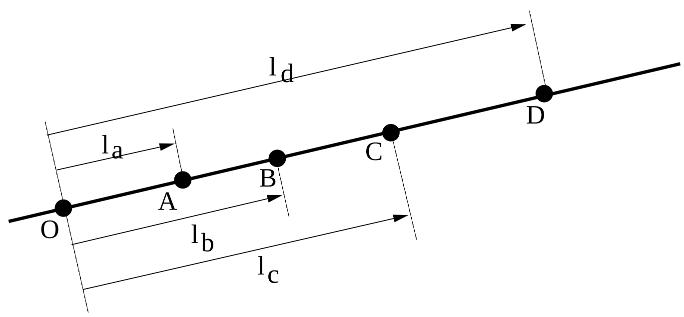
$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{bmatrix}$$

Types de transformations :



Caractéristiques :

- 8 degrés de liberté.
- Préserve : les droites concourantes, la colinéarité, le birapport de 4 points colinéaires :



Le birapport de 4 points colinéaires est défini comme :

$$\frac{l_c - l_a}{l_c - l_b} / \frac{l_d - l_a}{l_d - l_b}$$

où l_x est la distance Euclidienne.

Exercices :

1. Démontrez la préservation de la colinéarité.

2. Démontrez que le point intersection de 2 droites de coordonnées homogènes l_1 et l_2 a pour coordonnées homogènes : $l_1 \wedge l_2$.

3. Soit M la matrice de transformation projective des points du plan. Quelle est la matrice de transformation des droites ?

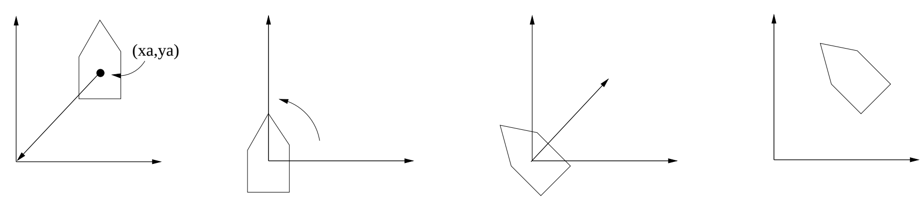
3 Composition des transformations de base

À l'aide des coordonnés homogènes, les transformations du plan se composent par simple multiplication. Par exemple, pour la rotation autour d'un point A de coordonnées (x_a, y_a) :

1. Translation telle que A est à l'origine.

2. Rotation.

3. Translation inverse.



$$X' = MX,$$

$$M = T(x_a, y_a) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_a, -y_a).$$

D'une manière générale :

$$M = M_1 \cdot ... \cdot M_n.$$

Le produit est non commutatif dans le cas général. Les cas particuliers sont :

1. translations pures;

2. rotations pures;

3. changements d'échelle pures;

4. changements d'échelle et rotation si :

   - $s_x = s_y$;
   - $\theta = n\pi$.

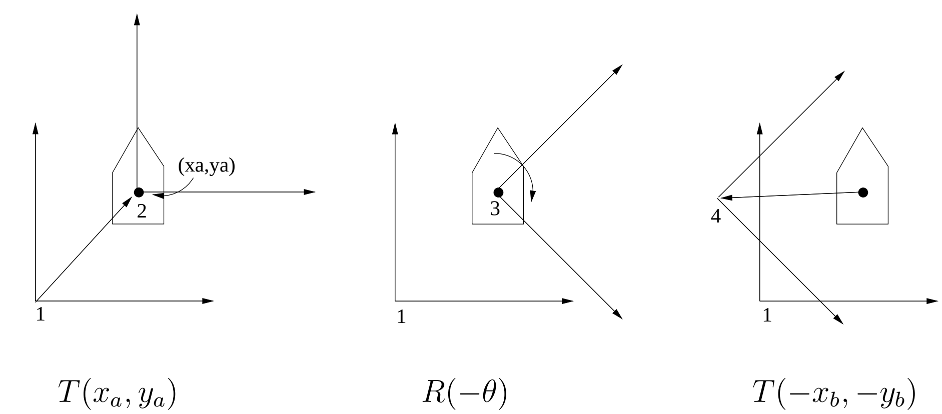
3.1 Changement de repère

Une façon équivalente de transformer consiste à effectuer des changements de systèmes de coordonnées.

Utile lorsque :

☞ les objets manipulés sont définis dans des repères locaux;

☞ la modélisation des caméras.



Matrice de passage du repère 1 au repère 4 : ${}^4_1M$,

$$ {}_4X = {}^4_1M \cdot {}_1X, $$

$$ {}^4_1M = T(x_b, y_b) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_a, -y_a). $$

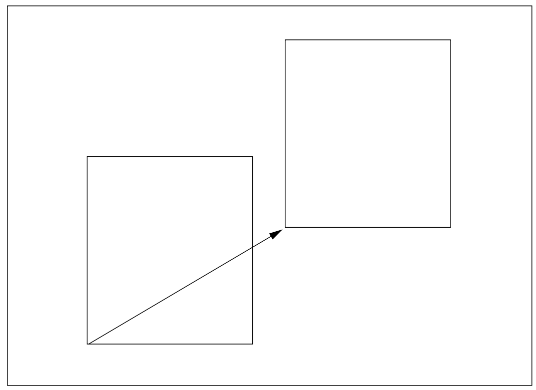
☞ Règle :

Soit ${}_iQ$ une matrice de transformation exprimée dans un repère i, alors la matrice de la transformation exprimée dans le repère j est ${}_jQ$:

$${}_jQ = {}^i_jM \cdot {}_iQ \cdot {}^i_jM^{-1}.$$

4 Transformation d'images

Les transformations définies précédemment peuvent s'appliquer à des images. Cela est notamment utilisée pour le *texture mapping*.



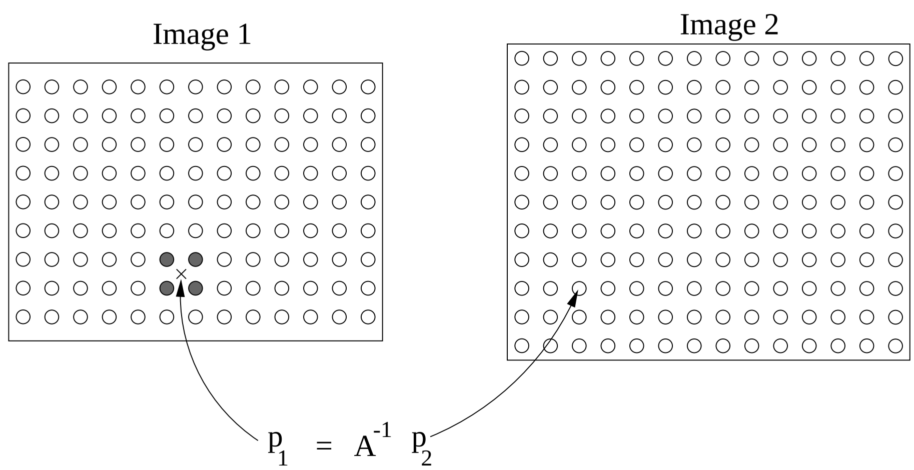
Translation d'une image

Problème : une image est un tableau de valeurs discrètes : les pixels ; la position transformée d'un pixel ne correspond pas forcément à un pixel de l'image transformée (valeurs non entières).

Les méthodes solutions consistent à déterminer pour chaque pixel de l'image destination la position dans l'image source. Les algorithmes varient ensuite sur la manière de calculer l'intensité du pixel de l'image destination.

Soit A la transformation image envisagée. L'algorithme est :

pour chaque pixel (i,j) de l'image destination
1. calculer $(w'x', w'y', w')^t = A^{-1} \cdot (i, j, 1)^t$
2. déterminer les valeurs d'intensité à la position (x', y') *de l'image d'origine.*



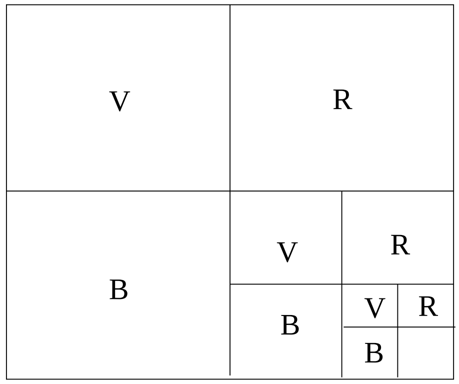
Pour déterminer les valeurs d'intensités :

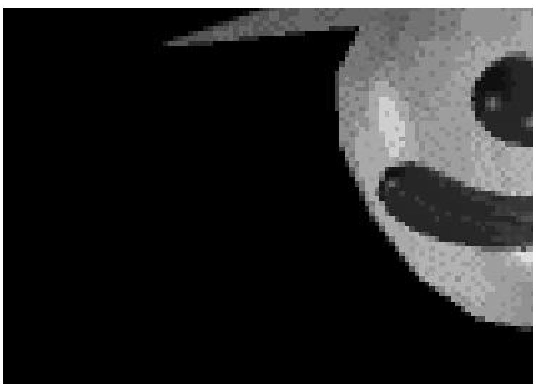
1. Prendre les valeurs du pixel le plus proche de la position (x', y').
2. Interpoler les valeurs des 4 pixels voisins de la position (x', y').
3. Moyenner les valeurs des 4 pixels voisins de la position (x', y').

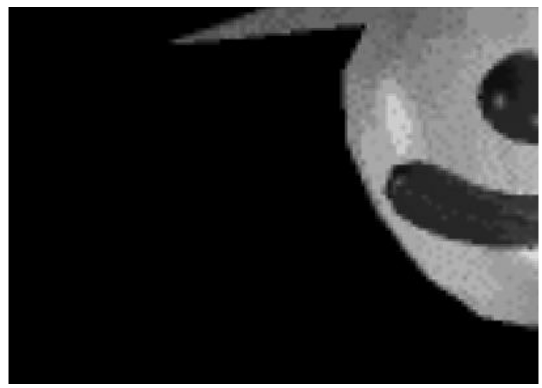
Choix entre interpolation et moyennage ?

Exemple d'application : les Mip Maps (*multum in parvo*)
Pré-calculs d'images à différentes échelles pour le texture mapping.

la mip map occupe $4/3$ *de l'espace mémoire de l'image d'origine.*







Interpolation

Moyennage